COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-62/95

C. Pellegrini: EFFETTI DI PICCOLE ROTAZIONI DEL PIANO MEDIANO DI UN SINCROTRONE SULLE ORBITE DELLE PARTICELLE.

Nota interna: n° 165
20 Novembre 1962

Servizio Documentazione
dei Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN
Casella Postale 70 - Frascati (Roma)

Laboratori Nazionali di Frascati del C.N.E.N.
Servizio Documentazione

LNF-62/95

Nota interna: n° 165
20 Novembre 1962

C. Pellegrini: EFFETTI DI PICCOLE ROTAZIONI DEL PIANO MEDIANO DI UN SINCROTRONE SULLE ORBITE DELLE PARTICELLE.

1) In un sincrotrone ideale esiste un piano di simmetria tale che in ogni suo punto il campo magnetico è puramente verticale. Usando come sistema di riferimento quello definito dai vettori $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, $\underline{\gamma}$, rispettivamente tangente, normale e binormale dell'orbita di riferimento, si può scrivere il campo magnetico nella forma:

$$\begin{aligned} H_1 &= \underline{H} \cdot \underline{\alpha} = 0 \\ H_2 &= \underline{H} \cdot \underline{\beta} = az \\ H_3 &= \underline{H} \cdot \underline{\gamma} = ax+c \end{aligned} \qquad (1)$$

ove x,z sono le componenti del vettore

$$\delta P = \underline{\alpha}\sigma + x\underline{\beta} + \underline{\gamma} z$$

che misura lo spostamento di una particella dall'orbita di riferimento.

Tutte le quantità introdotte sono funzioni dell'ascissa curvilinea s dell'orbita di riferimento.

In particolare, detto H_s il valore di H sull'orbita di riferimento e $K = \frac{1}{\rho}$ la curvatura di questa, le grandezze a, c assumono i seguenti valori:

$$\begin{cases} a = H_s \, nK \\ c = H_s \end{cases} \tag{2}$$

in un magnete;

$$\begin{cases} a = G \\ c = 0 \end{cases} \tag{3}$$

in un quadrupolo;

$$a = 0 \qquad c = 0 \tag{4}$$

in una sezione senza campo magnetico.

Usando la forma (1) del campo le equazioni del moto si scrivono come

$$\begin{cases} \sigma' = K\,x \\ x'' + \omega_1^2 \, x = -\,Kp \\ z'' + \omega_2^2 \, z = 0 \end{cases} \tag{5}$$

con

$$\omega_1^2 = K^2 + \frac{a}{E_s} \, ,$$

$$\omega_2^2 = -\,\frac{a}{E_s} \, ;$$

inoltre

$$E_s = \left| \frac{e\,H_s}{K} \right|$$

è l'energia corrispondente all'orbita di riferimento e

$$p = \frac{E}{E_s} - 1 .$$

La soluzione delle (5) è[1])

$$\begin{cases} x = p\sqrt{\beta_r}\cos(\nu_1\phi_1 + \delta_1) - p\psi, \\ z = q\sqrt{\beta_2}\cos(\nu_2\phi_z + \delta_2). \end{cases} \tag{6}$$

Piccole rotazioni dei magneti o dei quadrupoli portano a modificare le equazioni del moto; in particolare esse fanno si che le oscillazioni di betatrone radiali e verticali non siano più disaccoppiate.

Gli effetti di questo accoppiamento sulla stabilità del moto delle particelle sono già stati studiati[1)2)].

Il risultato ottenuto è che l'accoppiamento introduce risonanza se

$$\nu_1 + \nu_2 = \text{numero intero},$$

mentre se

$$\nu_1 - \nu_2 = \text{numero intero}$$

l'effetto è quello di trasferimento completo della ampiezza radiale imperturbata sul piano verticale e viceversa.

Noi vogliamo studiare il caso in cui sia

$$\nu_1 \pm \nu_2 \neq \text{numero intero},$$

e quindi si ha solo un trasferimento parziale delle ampiezze imperturbate radiali e verticali sui piani verticale e radiale.

Questo sarà fatto nei paragrafi 2 e 3, usando una tecnica perturbativa, cioè sviluppando le soluzioni in serie di potenze rispetto agli angoli di rotazione ψ e trascurando i termini di ordine superiore al primo.

Dopo aver applicato i risultati ottenuti al caso di una macchina del tipo di Adone (paragrafo 4) calcoleremo anche la larghezza della stop-band intorno alla risonanza.

Poichè ci limitiamo a considerare le perturbazioni sulle traiettorie dovute a piccole rotazioni casuali, possiamo considerare separatamente le rotazioni attorno agli assi ottico (caso a), radiale (caso b) e verticale (caso c) dei magneti o dei quadrupoli.

Nei tre casi il campo magnetico e le equazioni del moto diventano (approssimando sen φ con φ e cos φ con 1, dove φ è l'angolo di rotazione):

a)

$$\begin{cases} H_1 = 0 \\ H_2 = c\varphi + a\,(z + 2\,x\,\varphi\,) \\ H_3 = c + a\,(x - 2\,z\varphi) \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \sigma' = Kx \\ x'' + \omega_1^2\,x + Bz = -\,Kp \\ z'' + \omega_2^2\,z + Bx = -\,K\varphi \end{cases} \tag{8}$$

con

$$B = -\,2\,a\,\varphi/E_s;$$

b)

$$\begin{cases} H_1 = c\,\varphi + 2a\,x\,\varphi \\ H_2 = az \\ H_3 = c + ax \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \sigma' = Kx \\ x'' + \omega_1^2\,x + \varphi\,Kz' = -\,Kp \\ z'' + \omega_2^2\,z - \varphi\,Kx' = 0 \end{cases} \tag{10}$$

c)

$$\begin{cases} H_1 = 2az\,\varphi \\ H_2 = a\,z \\ H_3 = a\,x + c \end{cases} \tag{11}$$

e le equazioni del moto rimangono invariate a meno di termini del secondo ordine nelle x, z, e moltiplicati ancora per φ. Poichè l'effetto di perturbazione è nel caso c molto più piccolo che negli altri casi ci limiteremo a trattare le sole rotazioni attorno agli assi radiale ed ottico.

2) Cominciamo col considerare il caso a).

Poniamo

$$\begin{cases} x = x_0 + x_1 \\ z = z_0 + z_1 \end{cases}$$

dove x_0, z_0 sono le soluzioni (6) del sistema imperturbato (5), e x_1, z_1 di ordine φ.

Sostituendo in (8) si ha:

$$\begin{cases} x_1'' + \omega_1^2 x_1 + B\{z_0 + z_1\} = 0 \\ z_1'' + \omega_2^2 z_1 + B\{x_0 + x_1\} = -K\varphi \end{cases} \qquad (12)$$

Dalle (12) si vede subito che z_1 contiene un termine di orbita chiusa z_{1c} che, trascurando Bx_0 e Bx_1, si può ottenere come soluzione particolare dell'equazione

$$z''_{1c} + \omega_2^2 z_{ic} = -K\varphi \qquad (13)$$

Questo effetto si può ricondurre ad un disallineamento verticale ed è provocato da rotazioni dei soli magneti curvanti. L'ampiezza quadratica media di questa orbita chiusa è data[1)] da:

$$\langle z_{1c}^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{\operatorname{sen}\pi\nu_2} \frac{R}{\nu\sqrt{N}} \langle \varphi^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \qquad (14)$$

dove:

N = numero di magneti,

$\langle\varphi^2\rangle$ = valore quadratico medio dell'angolo di rotazione.

Consideriamo ora la soluzione del sistema omogeneo ottenuto da (12).

Ponendo

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\beta_r}\,\eta\,, \\ z_1 = \sqrt{\beta_v}\,\zeta\,, \end{cases} \qquad (15)$$

introducendo le variabili angolari

$$\phi_r = \int^s \frac{ds}{\nu_1 \beta_r}\,,$$

$$\phi_v = \int^s \frac{ds}{\nu_2 \beta_v}\,,$$

ed assumendo

$$\beta_r \sim \frac{R}{\nu_1}, \quad \beta_v \sim \frac{R}{\nu_2},$$

$$\phi_r \simeq \phi_v \simeq \frac{s}{R} = \theta,$$

R = raggio medio della macchina, il sistema (12) diventa[1)]

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\eta}{d\theta^2} + \nu_1^2\,\eta + \nu_1^2\,(R^2/\nu_1^{3/2}\,\nu_2^{\frac{1}{2}})\,B\zeta = -\,\nu_1^2(\dfrac{R}{\nu_1})^{3/2}\,Bz_o \\ \dfrac{d^2\zeta}{d\theta^2} + \nu_2^2\,\zeta + \nu_2^2\,(R^2/\nu_2^{3/2}\,\nu_1^{\frac{1}{2}})\,B\eta = -\,\nu_2^2(\dfrac{R}{\nu_2})^{3/2}\,Bx_o \end{cases}$$

Trascurando i termini $B\zeta$, $B\eta$, del secondo ordine in φ, otteniamo

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\eta}{d\theta^2} + \nu_1^2\,\eta = -\,\dfrac{R^2}{(\nu_1\ \nu_2)^{\frac{1}{2}}}\,Bq\,e^{i(\nu_2\theta + \delta_2)} \\ \\ \dfrac{d^2\zeta}{d\theta^2} + \nu_2^2\,\zeta = -\,\dfrac{R^2}{(\nu_1\ \nu_2)^{\frac{1}{2}}}\,Bp\,e^{i(\nu_1\theta + \delta_1)} \end{cases} \qquad (16)$$

Le funzioni η, ζ si possono scrivere come prodotto di una funzione periodica sul giro per una con frequenza

ν_1 o ν_2:

$$\begin{cases} \eta(s) = \bar{\eta}(s)\, e^{i(\nu_2 \theta + \delta_2)} \\ \xi(s) = \bar{\xi}(s)\, e^{i(\nu_1 \theta + \delta_1)} \end{cases} \tag{17}$$

Sostituendo nelle (16) si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\bar{\eta}}{d\theta^2} + 2\,i\,\nu_2 \dfrac{d\bar{\eta}}{d\theta} + (\nu_1^2 - \nu_2)^2\,\bar{\eta} = - \dfrac{R^2\,Bq}{\sqrt{\nu_1\,\nu_2}} \\ \dfrac{d^2\bar{\xi}}{d\theta^2} + 2\,i\,\nu_1 \dfrac{d\bar{\xi}}{d\theta} + (\nu_2^2 - \nu_1^2)\,\bar{\xi} = - \dfrac{R^2\,Bp}{\sqrt{\nu_1\,\nu_2}} \end{cases} \tag{18}$$

La soluzione di (18) si ottiene sotto forma di sviluppo in serie di Fourier.

Posto

$$\begin{cases} - \dfrac{R^2\,B}{\sqrt{\nu_1\,\nu_2}} = f(\theta) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}_K \; f_K\, e^{iK\theta} \\ \bar{\eta} = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}_K \; \bar{\eta}_K\, e^{iK\theta} \\ \bar{\xi} = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}_K \; \bar{\xi}_K\, e^{iK\theta} \end{cases} \tag{19}$$

e sostituendo in (18) si ha

$$\begin{cases} \bar{\eta}_K = \dfrac{q\,f_K}{-K^2 - 2\nu_2 K + (\nu_1^2 - \nu_2)^2} = \dfrac{q f_K}{\nu_1^2 - (\nu_2 + K)^2} \\ \bar{\xi}_K = \dfrac{p f_K}{\nu_2^2 - (\nu_1 + K)^2} \end{cases} \tag{20}$$

In definitiva otteniamo

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_o + x_1 \simeq x_o + \sqrt{\beta_r}\, e^{i(\nu_2\theta + \delta_2)}\, \bar{\eta} \; . \\ \qquad\qquad \sim \; x_o + \frac{z_o}{q}\sqrt{\frac{\beta_r}{\beta_v}}\, \bar{\eta} \\ z \sim z_o + \frac{x_o}{p}\sqrt{\frac{\beta_v}{\beta_r}}\, \bar{\xi} \end{array}\right. \qquad (21)$$

Vogliamo ora ricavare i valori quadratici medi di

$$\sqrt{\frac{\beta_r}{\beta_v}}\,\frac{\bar{\eta}}{q} \quad e \quad \sqrt{\frac{\beta_v}{\beta_r}}\,\frac{\bar{\xi}}{p}.$$

Eseguiamo il calcolo per la funzione

$$\sqrt{\frac{\beta_v}{\beta_r}}\,\frac{\bar{\xi}}{p}.$$

Quadrando e mediando su θ si ha

$$\left\langle \frac{\beta_v}{\beta_r}\,\frac{\bar{\xi}^2}{p^2}\right\rangle \equiv A_v^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_K \frac{f_K\, f_K^*}{\left[\nu_2^2 - (\nu_1+K)^2\right]^2}\,\theta \qquad (22)$$

Il prodotto $f_K\, f_K^*$ è dato da

$$T = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\theta)f(\theta')\, e^{-iK(\theta - \theta')}\, d\theta d\theta' \qquad (23)$$

Consideriamo ora il valor medio $\bar{T}$ su un insieme di macchine aventi errori casuali. Il valor medio

$$\overline{f(\theta)\, f(\theta')}$$

è diverso da zero solo se θ e θ' sono nello stesso magnete o quadrupolo. Si ha quindi

$$\bar{T} = \frac{1}{4\pi^2}\sum_1^M{}_i \frac{fi^2\, Li^2}{\nu_1^2\, \beta_{ri}^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\langle\varphi^2\rangle\,\frac{R^4}{\nu_1\nu_2}\sum_1^M{}_i\left(\frac{ai}{E_s}\right)^2\frac{Li^2}{\nu_1^2\,\beta_{ri}^2} \qquad (24)$$

ove la sommatoria va estesa a tutti gli elementi della macchina.

Sostituendo nella (22) otteniamo

$$A_v^2 = \bar{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_K \frac{1}{\left[\nu_2^2-(\nu_1+K)^2\right]^2}$$

$$= \bar{T} \frac{\pi^2}{4\nu_1^2} \left\{ \frac{1}{\mathrm{sen}^2\pi(\nu_2+\nu_1)} + \frac{1}{\mathrm{sen}^2\pi(\nu_1-\nu_2)} \right. \tag{25}$$

$$\left. + \frac{1}{\pi\nu_1} \left[\cot\pi(\nu_1+\nu_2) + \cot\pi(\nu_1-\nu_2)\right]\right\}$$

Analogamente si ha

$$A_r^2 \equiv \left\langle \frac{\beta_r}{\beta_v} \frac{\bar{\eta}^2}{q^2} \right\rangle = \bar{T} \frac{\pi^2}{4\nu_2^2} \left\{ \frac{1}{\mathrm{sen}^2\pi(\nu_1-\nu_2)} + \right.$$

$$+ \frac{1}{\mathrm{sen}^2\pi(\nu_1-\nu_2)} + \frac{1}{\pi\nu_2}\left[\cot\pi(\nu_1+\nu_2) + \right. \tag{26}$$

$$\left.\left. + \cot\pi(\nu_2-\nu_1)\right]\right\}$$

Poichè $\frac{1}{\pi\nu} \cot\pi\nu < \frac{1}{\mathrm{sen}^2\pi\nu}$, gli ultimi due termini di (25), (26) possono essere trascurati.

Sostituendo la (24) nelle (25), (26), assumendo ancora $\beta \sim \frac{R}{\nu}$ e inoltre che i magneti ed i quadrupoli abbiano tutti la stessa lunghezza $L_M = \frac{2\pi\rho}{N}$ ed L_Q si ha

$$A_v^2 = \left\{ \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \pi (\nu_1 + \nu_2)} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \pi (\nu_1 - \nu_2)} \right\} \cdot \frac{R^2}{4\nu_1^3 \nu_2} \left[\frac{4\pi^2 n^2}{N \varrho^2} + \left(\frac{G}{H\varrho}\right)^2 L_Q^2 Q \right] \langle \varphi^2 \rangle \tag{27}$$

dove N è il numero dei magneti, Q è il numero dei quadrupoli. Analogamente

$$A_r^2 = \frac{R^2}{4\nu_2^3 \nu_1} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \pi (\nu_1 + \nu_2)} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \pi (\nu_1 - \nu_2)} \right\} \cdot \left\{ \frac{4\pi^2 n^2}{N \varrho^2} + \left(\frac{G}{H\varrho}\right)^2 L_Q^2 Q \right\} \langle \varphi^2 \rangle \tag{28}$$

3) Consideriamo ora il caso b)

Poniamo di nuovo

$$x = x_o + x_1$$
$$z = z_o + z_1$$

Sostituendo in (10) si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1'' + \omega_1^2 x_1 + \varphi K z_1' = - \varphi K z_o', \\ z_1'' + \omega_2^2 z_1 - \varphi K x_1' = + \varphi K x_o'; \end{array} \right. \tag{29}$$

procedendo come nel caso precedente si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2\eta}{d\theta^2} + \nu_1^2 \eta = - i \nu_2 \dfrac{R K \varphi q}{\sqrt{\nu_1 \nu_2}} e^{i(\nu_2 \theta + \varphi)} \\[2ex] \dfrac{d^2\zeta}{d\theta^2} + \nu_2 \zeta = + i \nu_1 \dfrac{R K \varphi p}{\sqrt{\nu_1 \nu_2}} e^{i(\nu_1 \theta + \varphi)} \end{array} \right.$$

cioè

$$\begin{cases} \eta = \bar{\eta}\, e^{i(\nu_2\theta + \varphi)} \\ \xi = \bar{\xi}\, e^{i(\nu_1\theta + \varphi)} \end{cases}$$

con

$$\bar{\eta} = q \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_K \frac{f_K}{\nu_2^2 - (\nu_1 + K)^2}$$

$$\bar{\xi} = p \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_K \frac{f_K}{\nu_1^2 - (\nu_2 + K)^2}$$

Si ottengono quindi formule completamente uguali alle (25) (26) purchè si assuma

$$\bar{T} = \frac{\nu_2}{\nu_1} \frac{1^2}{N} \cdot \langle \varphi^2 \rangle$$

In definitiva abbiamo ancora

$$\begin{aligned} x &= x_o + \sqrt{\frac{\beta_r}{\beta_v}}\, \frac{\bar{\eta}}{q}\, z_o \\ z &= z_o + \sqrt{\frac{\beta_v}{\beta_r}}\, \frac{\bar{\xi}}{p}\, x_o \end{aligned} \qquad (30)$$

con

$$\left\langle \frac{\beta_v}{\beta_r} \frac{\bar{\xi}^2}{p^2} \right\rangle = \left\langle \frac{\beta_r}{\beta_v} \frac{\bar{\eta}^2}{q^2} \right\rangle = A^2 = \frac{\pi^2}{4\, \nu_2\, \nu_1} \left\{ \frac{1}{\mathrm{sen}^2 \pi(\nu_2 + \nu_1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\mathrm{sen}^2 \pi(\nu_2 - \nu_1)} \right\} \frac{1}{N} \langle \varphi^2 \rangle . \qquad (31)$$

4) Vogliamo ora discutere i risultati ottenuti.

Sia nel caso del sistema di equazioni (8) che in quello del sistema (10) abbiamo ottenuto una soluzione della forma

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_0 + A_1 z_0 \\ &= p\sqrt{\beta_r}\cos(\nu_1\phi_r + \delta_1) + A_1 q\sqrt{\beta_z}\cos(\nu_2\phi_v + \delta_2) \\ &\quad - p\psi \\ z &= z_0 + A_2 x_0 = \\ &= q\sqrt{\beta_z}\cos(\nu_2\phi_z + \delta_2) + A_2 p\sqrt{\beta_r}\cos(\nu_1\phi_r + \delta_1) \\ &\quad - A_2 p\psi \end{aligned}\right. \tag{32}$$

con A_1, A_2 dati dalle (27), (28), (31).

Dalle (32) si vede chiaramente che per effetto delle rotazioni casuali si ha l'introduzione di un accoppiamento fra le oscillazioni di betatrone radiali e verticali ed inoltre una rotazione del piano delle orbite chiuse di un angolo pari ad arct A_2.

I valori delle A dati da (27, (28), (31) diventano infinitamente grandi, e quindi si ha una risonanza, se

$$\nu_2 + \nu_1 = \text{numero intero}$$

oppure se

$$\nu_2 - \nu_1 = \text{numero intero.}$$

Mentre nel primo caso, come già detto, si ha effettivamente una risonanza, nel secondo caso si ha solo un accoppiamento completo, cioè $A = 1$. Il fatto che noi otteniamo una risonanza anche per $\nu_2 - \nu_1$ = numero intero è dovuto all'aver trascurato i termini del tipo $B\xi$, $B\eta$.

Tuttavia questa approssimazione, ed i risultati ottenuti, sono validi se $\nu_2 - \nu_1 \neq$ numero intero e se le A sono minori di 1.

A titolo di esempio determiniamo ora i valori numerici di A_r, A_v, A' nel caso di Adone, cioè di una macchina con elemento di periodicità

$$O\ Q_F\ M\ Q_D\ M\ Q_F\ O.$$

Assumiamo

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= 2.2\\
\nu_2 &= 2.2\\
R &= 8\ \text{m}\\
\rho &= 2.5\ \text{m}\\
n &= 0.5\\
G/H\rho &= 0.8\ \text{m}^{-2}\\
L_a &= 0.5\ \text{m}\\
N &= 16\\
Q &= 24
\end{aligned}$$

Si ha

$$\frac{1}{\text{sen}^2\pi(\nu_1+\nu_2)} \sim 1, \qquad \frac{1}{\text{sen}^2\pi(\nu_1-\nu_2)} \sim 10.5$$

e quindi, considerando separatamente l'effetto delle rotazioni dei magneti e quelle dei quadrupoli,

$$A_r \sim A_v \simeq 8.10^{-2}\langle\varphi^2\rangle_M^{\frac{1}{2}} + \langle\varphi^2\rangle_Q^{\frac{1}{2}}$$

$$A' \sim 0.12\sqrt{\langle\varphi^2\rangle_M}$$

Se vogliamo che sia A_r, A_v, $A' \sim 10^{-2}$ deve essere

$$\sqrt{\langle\varphi^2\rangle_M} \sim 8 \times 10^{-2}$$

$$\sqrt{\langle\varphi^2\rangle_Q} \sim 1 \times 10^{-2}$$

Nel caso delle rotazioni attorno all'asse ottico occorre anche considerare l'orbita chiusa indotta nel piano verticale, la cui ampiezza quadratica media è data dalla (14) che nel nostro caso si riduce a

$$\langle z_{1c}^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \simeq 10 \ \langle \varphi_M^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \ \mathrm{m}.$$

5) Rimane ancora da calcolare la larghezza della stop-band attorno alla risonanza $\nu_1 + \nu_2$ = intero.
Questa è data da[1)]

$$\delta \nu = \frac{R}{\pi \nu} \left\{ \frac{16 \pi^2}{N} \left(\frac{1-2n}{\varrho} \right)^2 + 4 \left(\frac{G}{H \varrho} \right)^2 L_Q^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\langle \varphi^2 \rangle}$$

Con i valori dei parametri usati precedentemente si ottiene

$$\delta \nu \sim \sqrt{\langle \varphi^2 \rangle_Q}$$

Desidero ringraziare il Prof. F. Amman per aver discusso con me il problema.

Bibliografia

1) - E.D. Courant e H.S. Snyder - Annals of Phys. 3, 1 (1958

2) - G. Lüders: The theory and design of an alternating gradient proton synchrotron - CERN (1953) pag. 55.